

Die Kühlrate eines granularen Gases

Werner Ebeling zum 60. Geburtstag gewidmet.

Thomas Schwager und Thorsten Pöschel

Institut für Physik, Humboldt Universität Berlin, Invalidenstraße 110, D-10115 Berlin

Das dissipative Verhalten granularer Gase ist wegen seiner ungewöhnlichen Eigenschaften von großem wissenschaftlichen Interesse. Goldhirsch and Zanetti [1] und McNamara und Young [2] zeigten, daß ein homogen initialisiertes granulares Gas im Laufe der Zeit instabil ist - nach einiger Zeit der Abkühlung durch dissipative Stöße¹ bilden sich räumliche Dichteinhomogenitäten und schließlich Cluster.

Um den Verlust an kinetischer Energie beim Stoß zweier Teilchen mit normaler Relativgeschwindigkeit g vor und g' nach dem Stoß zu quantifizieren, definiert man den (normalen) Restitutionskoeffizienten

$$g' = -\epsilon g . \quad (1)$$

Es ist gezeigt worden, daß schon Systeme aus drei Teilchen, die sich auf einer Linie bewegen, komplexes Verhalten aufweisen: Liegt der Restitutionskoeffizient in einem bestimmten Intervall, so lassen sich Anfangsbedingungen finden, so daß die Teilchen unendlich viele Kollisionen in endlicher Zeit ausführen [3]. Dieses Verhalten bezeichnet man als "inelastischen Kollaps" [2]. Während man das Intervall für ϵ für den beschriebenen eindimensionalen Fall exakt angeben kann, ist man für höhere Dimension auf Näherungen und numerische Rechnungen angewiesen [4]. Mit bestimmten Annahmen über die tangentielle Dämpfung konnte gezeigt werden, daß die Clusterwahrscheinlichkeit, d.h. die Größe des entsprechenden Phasenraumvolumens) stark wächst, falls die Teilchen Rotationsfreiheitsgrad haben [5]. In diesem Falle ist der Intervall für ϵ überraschenderweise wesentlich größer als für glatte Teilchen.

Wesentlich ist, daß in den zitierten Arbeiten [1, 2, 3, 4, 5] der Restitutionskoeffizient als *konstant* angenommen worden ist. Es zeigt sich jedoch sowohl theoretisch als auch experimentell, daß diese Annahme für reguläre Materialien nicht gerechtfertigt ist: Löst man die Kontinuumsgleichungen für stoßende Kugel, so konnte kürzlich gezeigt werden, daß der Restitutionskoeffizient $\epsilon(g)$ eine mit wachsender Stoßgeschwindigkeit g fallende Funktion ist [6]. Für die Kompression $\xi = R_1 + R_2 - |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ der Teilchen mit den

¹Der Term Abkühlung bezieht sich auf die sogenannte „granulare Temperatur“, d.h. auf die mittlere kinetische Energie der Teilchen.

Radien R_1 und R_2 , deren Mittelpunkte sich an \vec{r}_1 und \vec{r}_2 befinden, erhält man [6]

$$\ddot{\xi} + \rho \left(\xi^{3/2} + \frac{3}{2} A \sqrt{\xi} \dot{\xi} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\rho = \frac{2 Y \sqrt{R_{eff}}}{3 m_{eff} (1 - \nu^2)} \quad (3)$$

Y ist das Young-Modul und m_{eff} und R_{eff} sind die effektive Masse und der effektive Radius

$$m_{eff} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

$$R_{eff} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} . \quad (5)$$

A ist eine Materialkonstante, in die das Young-Modul, die viskosen Konstanten und die Poisson-Zahl des Materials einfließen. Die Anfangsbedingungen zur Lösung von (2) sind

$$\xi(0) = 0 \quad (6)$$

$$\dot{\xi}(0) = g . \quad (7)$$

Der geschwindigkeitsabhängige Restitutionskoeffizient ϵ der zur Zeit $t = 0$ stoßenden Teilchen kann aus der Lösung von (2) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (6,7) gewonnen werden, indem man die relative Geschwindigkeit zur Zeit des Stoßes $g = \dot{\xi}(0)$ mit der zur Zeit t_c (Stoßdauer), d.h. wenn die Teilchen ihre Berührung nach dem Stoß wieder lösen, ins Verhältnis setzt:

$$\epsilon = -\dot{\xi}(t_c) / \dot{\xi}(0) . \quad (8)$$

Die numerische Integration von Gleichung (8) führt also direkt auf den Restitutionskoeffizienten als Funktion der Stoßgeschwindigkeit (Abb. 1 [6]), was sich in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten befindet [7, 8]. Ein konstanter Restitutionskoeffizient wird also experimentell *nicht* gemessen. Für kleine Stoßgeschwindigkeiten nähert sich $\epsilon \rightarrow 1$, d.h. die Teilchen stoßen fast elastisch. Wir wollen hier bemerken, daß experimentell gezeigt worden ist, daß ϵ für *sehr* kleine Stoßgeschwindigkeit wieder fällt, da dann die (hier vernachlässigten) Oberflächeneigenschaften der Teilchen wichtig werden (z.B. [9]). Der Stoß von Teilchen wird ausführlich z.B. in [10, 11] behandelt.

Wenn wir ein Gas betrachten, das aus granularen Teilchen besteht, so können wir diesem Gas aufgrund der Geschwindigkeiten der Teilchen eine Temperatur T zuordnen. Unter der Voraussetzung, daß im System nur Paarstöße auftreten, wollen wir untersuchen, wie die Anfangstemperatur T_0 im Laufe der Zeit durch inelastische Stöße fällt. Eine weitere Voraussetzung, die Bedingung des molekularen Chaos, soll hier nicht weiter diskutiert werden. Es wurde mit Hilfe von ereignisgesteuerter Molekulardynamik (event driven MD) numerisch bestätigt, daß diese Voraussetzung selbst bei höherer

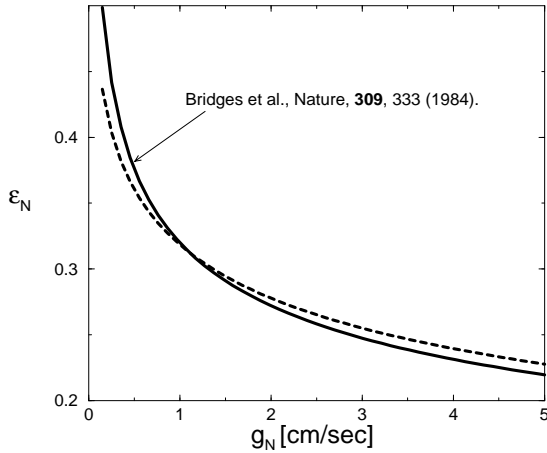


Abbildung 1: Die numerische Lösung von (2) mit den Materialkonstanten von Eis bei tiefen Temperaturen. Die entsprechenden experimentellen Resultate [7] zeigen relativ gute Übereinstimmung. (Die Figur wurde [6] entnommen.)

Teilchendichte über relativ lange Zeit gut erfüllt ist [12]. Die Kühlrate wurde für konstanten Restitutionskoeffizienten berechnet [13, 14], man erhält (s. auch [12]).

$$T(t) = T_0 (1 + t/\tau)^{-2} . \quad (9)$$

Die Zeitskala τ ist eine Materialkonstante. Der Temperaturabfall (9) ist die Ursache der oben besprochenen Clusterinstabilität [1, 2].

Wir wollen nun den geschwindigkeitsabhängigen Restitutionskoeffizienten durch Integration von (2) bestimmen, und das Analogon zu (9) für den Fall der geschwindigkeitsabhängigen Dämpfung mit Hilfe von (8) berechnen.

Die Dauer eines Stoßes t_c^0 elastisch stoßender Teilchen ($A = 0$) ist [15]

$$t_c^0 = \frac{\Theta_c^0}{\rho^{\frac{2}{5}} g^{\frac{1}{5}}} , \quad (10)$$

wobei Θ_c^0 eine Konstante ist. Mit der Substitution $\xi = \rho^{-2} x(\Theta)$ erhalten wir die umskalierte Geschwindigkeit $v = \rho^2 g$, und mit (10) $t = \Theta v^{-\frac{1}{5}}$. Damit können wir die ursprüngliche Bewegungsgleichung (2) in Ausdrücken der umskalierten Größen Kompression, relative Geschwindigkeit und Zeit x, v und Θ , und unter Verwendung der Abkürzung $\alpha = \frac{3}{2} A$ bequemer schreiben:

$$\ddot{x} + \alpha v^{-\frac{1}{5}} \dot{x} \sqrt{x} + v^{-\frac{2}{5}} x^{\frac{3}{2}} = 0 . \quad (11)$$

Die Ableitung \dot{x} bedeutet nun $\dot{x} = \frac{d}{d\Theta} x$. Für die Anfangsbedingungen ergibt sich

$$x(0) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v^{\frac{1}{5}} \frac{dx}{d\Theta}(0) = v \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \text{also} \\ \dot{x}(0) &= v^{\frac{4}{5}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Die Gleichung (11) werden wir vermittelst eines Reihenansatzes lösen. Da alle Ableitungen höherer als zweiter Ordnung von x bei $\Theta = 0$ divergieren, können wir x nicht in Potenzen von Θ entwickeln. Da ξ in der Form $\xi(t) = g t y(t)$ geschrieben werden kann, wählen wir den Ansatz

$$x(\Theta) = v^{\frac{4}{5}} \Theta (1 + \eta(\Theta)) \quad (15)$$

mit $\eta(0) = 0$. Wir erhalten somit eine Gleichung für η :

$$\Theta \ddot{\eta} + 2\dot{\eta} + \alpha v^{\frac{1}{5}} \Theta^{\frac{3}{2}} \dot{\eta} \sqrt{1 + \eta} + \left(\alpha v^{\frac{1}{5}} \sqrt{\Theta} + \Theta^{\frac{3}{2}} \right) (1 + \eta)^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (16)$$

In (16) kommen die Terme $\Theta^{0.5}$ und $\Theta^{1.5}$ vor, wir entwickeln η deshalb in Potenzen von $\sqrt{\Theta}$

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Theta^{\frac{k}{2}}. \quad (17)$$

Die beiden ersten Koeffizienten $a_0 = 0$ und $a_1 = 0$ dieser Reihe verschwinden aufgrund der Anfangsbedingungen. Unter Verwendung der Taylor-Entwicklung $\sqrt{1 + \eta}$ und $(1 + \eta)^{\frac{3}{2}}$ für kleine η erhalten wir nach längerer Rechnung

$$\eta = -\frac{4}{15} \alpha v^{\frac{1}{5}} \Theta^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{35} \Theta^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{70} \alpha v^{\frac{1}{5}} \Theta^4 + \frac{1}{15} \alpha^2 v^{\frac{2}{5}} \Theta^3 \dots \quad (18)$$

und nach einsetzen

$$\begin{aligned} x &= v^{\frac{4}{5}} \Theta - \frac{4}{15} \alpha v \Theta^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{35} v^{\frac{4}{5}} \Theta^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{15} \alpha^2 v^{\frac{6}{5}} \Theta^4 \\ &+ \frac{3}{70} \alpha v \Theta^5 - \frac{38}{2475} \alpha^3 v^{\frac{7}{5}} \Theta^{\frac{11}{2}} + \frac{1}{175} v^{\frac{4}{5}} \Theta^6 + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Nach umordnen der Reihe (19) erhält man (s. Abb. 2)

$$\begin{aligned} x &= v^{\frac{4}{5}} \left(\Theta - \frac{4}{35} \Theta^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{175} \Theta^6 + \dots \right) \\ &+ \alpha v \left(-\frac{4}{15} \Theta^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{70} \Theta^5 + \dots \right) \\ &+ \alpha^2 v^{\frac{6}{5}} \left(\frac{1}{15} \Theta^4 + \dots \right) + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

$$= v^{\frac{4}{5}} x_0(\Theta) + \alpha v x_1(\Theta) + \alpha^2 v^{\frac{6}{5}} x_2(\Theta) \dots \quad (21)$$

$v^{\frac{4}{5}} x_0$ ist die Lösung für den ungedämpften (elastischen) Stoß. Wir werden im folgenden $x\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right)$ benötigen, wobei Θ_c^0 die Dauer des ungedämpften Stoßes ist und wollen diese

Größe nun berechnen. Mit (21) erhalten wir

$$x\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) = v^{\frac{4}{5}}x_0\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \alpha v x_1\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \alpha^2 v^{\frac{6}{5}}x_2\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \dots \quad (22)$$

$$= v^{\frac{4}{5}}B_0 + \alpha v B_1 + \alpha^2 v^{\frac{6}{5}}B_2 + \dots \quad (23)$$

Die Koeffizienten B_k sind Konstanten, d.h. sie hängen insbesondere nicht von v ab.

Später werden wir noch die Lösung x^{inv} der *inversen Aufgabe* benötigen, d.h. die Lösung einer Kollision mit der Stoßgeschwindigkeit v' und der Endgeschwindigkeit v . Folglich beschreibt das inverse Problem keine gedämpfte Bewegung, sondern eine beschleunigte. Die Dämpfung α muß also durch die negative Dämpfung $-\alpha$ ersetzt werden. Ersetzen wir die beiden Größen $v \rightarrow v'$ und $\alpha \rightarrow -\alpha$ so erhalten wir

$$x^{inv}(\Theta') = (v')^{\frac{4}{5}}x_0(\Theta') - \alpha v' x_1(\Theta') + \alpha^2 (v')^{\frac{6}{5}}x_2(\Theta') \dots \quad (24)$$

Wir wollen nun die Stoßdauer Θ_c und die and Endgeschwindigkeit $\frac{d}{dt}x(\Theta_c)$ bestimmen. Die direkte Methode zur Berechnung von Θ_c ist, die ist Bestimmung von $x(\Theta) = 0$ mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung von x in der Nähe von Θ_c^0 . Man sieht jedoch sofort, daß dieses Verfahren nicht anwendbar ist, da alle Ableitungen $\frac{\partial^n x}{\partial \Theta^n}$ mit $n \geq 3$ bei $\Theta = \Theta_c^0$ divergieren (s. Abb. 2). Deshalb berechnen wir Θ_c auf indirekte Weise unter Verwendung des Resultats zum inversen Stoß.

Wir teilen die Aufgabe der Berechnung von Θ_c und $\frac{d}{dt}x(\Theta_c)$ in zwei Teile (s. Abb. 3): a) Die Kompression x der Teilchen x im Intervall von $\Theta = 0$ bis zur Zeit Θ_m , wo x sein Maximum erreicht, und wo die Geschwindigkeit der Kompression \dot{x} ihr Vorzeichen ändert. b) Die Kompression x im Intervall $\Theta \in [\Theta_m; \Theta_c]$. Im Fall des elastischen Stoßes ($\alpha = 0$) gilt $\Theta_m = \frac{\Theta_c^0}{2}$. Bei der Teilaufgabe b) betrachten wir nicht den Stoß selbst, sondern die inverse Aufgabe im Intervall $(\Theta = 0, \Theta'_m)$, wobei Θ'_m die Zeit ist, zu der x^{inv} sein Maximum erreicht. Anschließend fügen wir beide Teile unter Berücksichtigung der Stetigkeit zusammen $x(\Theta_m) = x^{inv}(\Theta'_m)$ (Differenzierbarkeit ist natürlich automatisch gewährleistet).

Für den inelastischen Stoß ($\alpha \neq 0$) führen wir $\Theta_m = \frac{\Theta_c^0}{2} + \delta$ und $\Theta'_m = \frac{(\Theta_c^0)'}{2} + \delta'$ ein. Wir erinnern, daß wir $\Theta_c^0 = (\Theta_c^0)'$ gefordert hatten. Zur Berechnung von δ entwickeln wir

$$\dot{x}\left(\frac{\Theta_c^0}{2} + \delta\right) = 0 = \dot{x}\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \delta \ddot{x}\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \frac{\delta^2}{2} \frac{d^3}{d\Theta^3}x\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \dots \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &= v^{\frac{4}{5}}\left(\dot{x}_0\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \delta \ddot{x}_0\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \frac{\delta^2}{2} \frac{d^3}{d\Theta^3}x_0\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \dots\right) \\ &\quad + v\alpha\left(\dot{x}_1\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \delta \ddot{x}_1\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \frac{\delta^2}{2} \frac{d^3}{d\Theta^3}x_1\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \dots\right) \\ &\quad + v^{\frac{6}{5}}\alpha^2\left(\dot{x}_2\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \delta \ddot{x}_2\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \frac{\delta^2}{2} \frac{d^3}{d\Theta^3}x_2\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) + \dots\right) \quad (26) \end{aligned}$$

und benützen $\dot{x}_0\left(\frac{\Theta_c^0}{2}\right) = 0$ ($v^{\frac{4}{5}}x_0$ die Lösung des elastischen Stoßes)

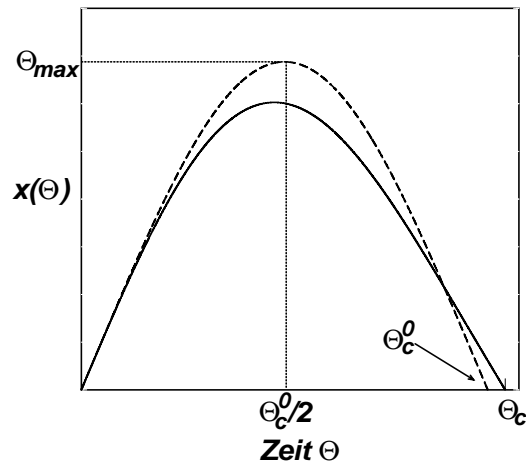


Abbildung 2: Die Dynamik eines Stoßes. Die gestrichelte Linie zeigt die symmetrische Lösung des elastischen Stoßes. Beim inelastischen Stoß (durchgezogene Linie) wird die maximale Kompression früher erreicht als beim elastischen Stoß, während die Dauer des gesamten Stoßes größer ist ($t_c > t_c^0$). Das Bild illustriert außerdem, warum wir zur Berechnung des inelastischen Stoßes den *inversen Stoß* verwenden: die Kurve x kann jenseits von Θ_c^0 nicht entwickelt werden, da die höheren Ableitungen der Lösung des elastischen Stoßes zur Zeit Θ_c^0 divergieren.

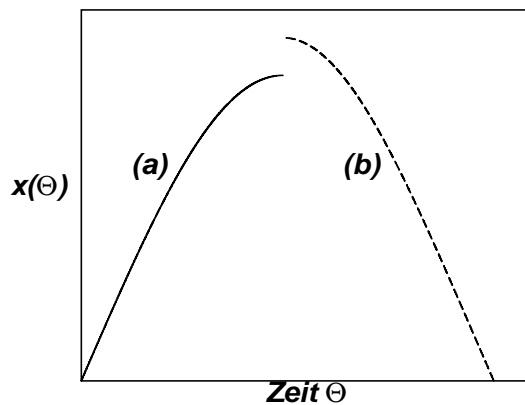


Abbildung 3: Skizze zur Berechnung von Θ_c und $\frac{d}{dt}x(\Theta_c)$. Der erste Teil (a) $\Theta \in (0, \Theta_m)$ wird direkt berechnet, zur Berechnung des zweiten Teils (b) definieren wir den *inversen Stoß*, bei dem die Teilchen mit der Geschwindigkeit v' aufeinandertreffen und zur Zeit $\Theta = \Theta_m$ die Relativgeschwindigkeit verschwindet. Beide Kurven sollen sich glatt aneinanderfügen.

$$\delta = -\alpha v^{\frac{1}{5}} \frac{\dot{x}_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)}{\ddot{x}_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)} + \mathcal{O}(\alpha^2) . \quad (27)$$

Den Ausdruck für (27) setzen wir nun in die Taylor-Entwicklung von $x \left(\frac{\Theta_c^0}{2} + \delta \right)$ ein:

$$\begin{aligned} x \left(\frac{\Theta_c^0}{2} + \delta \right) &= v^{\frac{4}{5}} \left(x_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \delta \dot{x}_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \frac{\delta^2}{2} \ddot{x}_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \dots \right) \\ &\quad + \alpha v \left(x_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \delta \dot{x}_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \frac{\delta^2}{2} \ddot{x}_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \dots \right) \quad (28) \\ &= v^{\frac{4}{5}} x_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \alpha v x_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) - \frac{\alpha^2 v^{\frac{6}{5}}}{2} \frac{\dot{x}_1^2 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)}{\ddot{x}_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)} \\ &\quad + \alpha^2 v^{\frac{6}{5}} x_2 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^3) . \quad (29) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Kompression am Umkehrpunkt

$$x(\Theta_m) = v^{\frac{4}{5}} x_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \alpha v x_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \alpha^2 v^{\frac{6}{5}} \left(x_2 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\dot{x}_1^2 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)}{\ddot{x}_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)} \right) + \dots \quad (30)$$

und mit der Ersetzung $v \rightarrow v'$ und $\alpha \rightarrow -\alpha$ den entsprechenden Wert für den inversen Stoß

$$\delta' = \alpha (v')^{\frac{1}{5}} \frac{\dot{x}_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)}{\ddot{x}_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (31)$$

$$x^{inv}(\Theta'_m) = (v')^{\frac{4}{5}} x_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) - \alpha v' x_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \alpha^2 (v')^{\frac{6}{5}} \left(x_2 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\dot{x}_1^2 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)}{\ddot{x}_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)} \right) + \dots \quad (32)$$

Wie oben beschrieben, werden die beiden Lösungen (30) und (32) nun aneinandergesetzt. Mit der Abkürzung

$$\beta = x_2 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\dot{x}_1^2 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)}{\ddot{x}_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)} \quad (33)$$

schreiben wir die Anschlußbedingung

$$v^{\frac{4}{5}} x_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \alpha v x_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \alpha^2 v^{\frac{6}{5}} \beta = (v')^{\frac{4}{5}} x_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) - \alpha v' x_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \alpha^2 (v')^{\frac{6}{5}} \beta . \quad (34)$$

Wenn wir v' in Potenzen von α ausdrücken

$$v' = v + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2 + \dots, \quad (35)$$

erhalten wir mit $\delta v = \alpha v_1 + \alpha^2 v_2 + \dots$

$$\begin{aligned} v^{\frac{4}{5}} x_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \alpha v x_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \alpha^2 v^{\frac{6}{5}} \beta \\ = v^{\frac{4}{5}} \left(1 + \frac{\delta v}{v} \right)^{\frac{4}{5}} x_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) - \alpha v \left(1 + \frac{\delta v}{v} \right) x_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right) + \alpha^2 v^{\frac{6}{5}} \left(1 + \frac{\delta v}{v} \right)^{\frac{6}{5}} \beta. \end{aligned} \quad (36)$$

Schreiben wir $\left(1 + \frac{\delta v}{v} \right)^{\frac{n}{5}}$ in Potenzen von α , so liefert der Koeffizientenvergleich schließlich

$$\begin{aligned} v' &= v \left(1 + \frac{5}{2} \alpha v^{\frac{1}{5}} \frac{x_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)}{x_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)} + \frac{15}{4} \alpha^2 v^{\frac{2}{5}} \left(\frac{x_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)}{x_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)} \right)^2 + \dots \right) \\ &= v \left(1 - \alpha v^{\frac{1}{5}} C_1 + \alpha^2 v^{\frac{2}{5}} C_2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (37)$$

und wir erhalten somit den geschwindigkeitsabhängigen Restitutionskoeffizienten für die Stoßgeschwindigkeit g (Abbildung 4).

$$\epsilon = \frac{v'}{v} = 1 - \alpha v^{\frac{1}{5}} C_1 + \alpha^2 v^{\frac{2}{5}} C_2 + \dots \quad (38)$$

$$= 1 - C_1 A \rho^{\frac{2}{5}} g^{\frac{1}{5}} + C_2 A^2 \rho^{\frac{4}{5}} g^{\frac{2}{5}} + \dots \quad (39)$$

Mit (27), (31) und (37) erhalten wir die Dauer des inelastischen Stoßes

$$\begin{aligned} t_c &= \left(\frac{\Theta_c^0}{2} + \delta \right) v^{-\frac{1}{5}} + \left(\frac{\Theta_c^0}{2} + \delta' \right) (v')^{-\frac{1}{5}} \\ &= \Theta_c^0 v^{-\frac{1}{5}} \left(1 - \frac{1}{4} \alpha v^{\frac{1}{5}} \frac{x_1 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)}{x_0 \left(\frac{\Theta_c^0}{2} \right)} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \Theta_c^0 v^{-\frac{1}{5}} \left(1 + \frac{1}{10} C_1 \alpha v^{\frac{1}{5}} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \Theta_c^0 \rho^{-\frac{2}{5}} g^{-\frac{1}{5}} \left(1 + \frac{1}{10} C_1 \alpha \rho^{\frac{2}{5}} g^{\frac{1}{5}} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned} \quad (40)$$

Zur Kontrolle der Rechnungen wurden die Zahlenwerte für C_1 und C_2 aus den exakten Ausdrücken (37) mit numerisch aus der Ausgangsgleichung (11) gewonnenen Werten verglichen. Analytisch erhält man $C_1 = 1.15344$ und $C_2 = 0.79826$. Integriert man die Differentialgleichung (11) analytisch, so erhält man aus dem numerischen Resultat

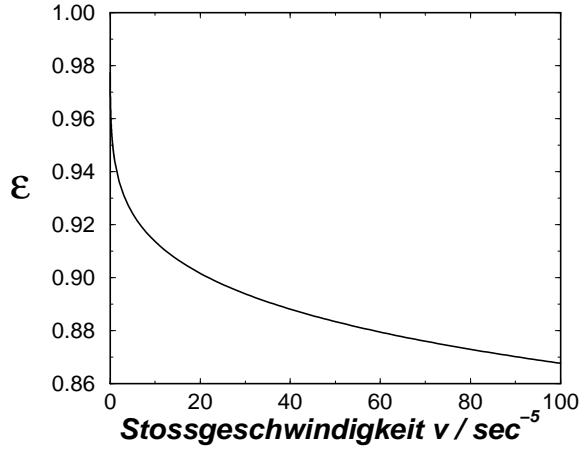


Abbildung 4: Der normale Restitutionskoeffizient als Funktion der Stoßgeschwindigkeit nach Gleichung (39). Wie erwartet verhalten sich die Teilchen für kleine Stoßgeschwindigkeit nahezu elastisch. Das Resultat der (zur Kontrolle angefertigten) numerischen Integration der ursprünglichen Gleichung (8) fällt mit dieser Kurve exakt zusammen.

$\epsilon(v)$ die Koeffizienten $C_1^{num} = 1.15356$ und $C_2^{num} = 0.80439$. Alternativ kann man $t_c(v)$ anpassen und bekommt $C_1^{num} = 1.15342$. Die numerischen Daten stimmen also sehr genau mit den theoretischen Werten überein.

Setzen wir den geschwindigkeitsabhängigen Restitutionskoeffizienten in den Stoßterm der Boltzmann-Gleichung ein

$$\dot{T} \sim \int \int dv_1 dv_2 (1 - \epsilon^2) |v_1 - v_2|^3 f(v_1) f(v_2) \quad (41)$$

so erhalten wir die Kühlrate eines dissipativen granularen Gases

$$T \sim T_0 / \left(1 + \frac{t}{\tau'}\right)^{\frac{5}{3}} \quad (42)$$

Unser Resultat (39) zeigt, daß der normale Restitutionskoeffizient für stoßende viskoelastische glatte Körper eine mit wachsender Stoßgeschwindigkeit fallende Funktion ist: $1 - \epsilon \sim g^{\frac{1}{5}}$. Eine direkte Schlußfolgerung dieses Zusammenhangs ist der Ausdruck für die Abkühlgeschwindigkeit eines granularen Gases (42): Ein granulares Gas, das aus realistischen viskoelastischen Teilchen besteht kühlt sich folglich durch dissipative Stöße wesentlich langsamer ab, als ein Gas aus (unphysikalischen) Teilchen mit konstantem Restitutionskoeffizienten (s. Gleichung. (9)).

Nach unserem Verständnis ist es nicht offensichtlich, in welcher Weise sich die Eigenschaften des Clusterprozesses für solche Teilchen von denen für Teilchen mit konstanten Koeffizienten [1, 2] unterscheidet, bzw. ob ein der homogene Zustand eines solchen Gas

überhaupt instabil ist, d.h. das Material clustert. Ebenso muß u.E. geprüft werden, ob der Extremfall der Clusterbildung, der inelastische Kollaps, für solche Teilchen existiert und in welcher Weise sich die Eigenschaften diese Szenarios verändern. Diese Arbeiten sind Gegenstand gewärtiger Arbeiten [16].

Die Autoren bedanken sich bei S. Esipov, F. Spahn, N. Brilliantov und W. Young für hilfreiche Diskussionen, und bei J.-M. Hertzsch für wertvolle Literaturhinweise.

Literatur

- [1] I. Goldhirsch and G. Zanetti, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1619 (1993).
- [2] S. McNamara and W. R. Young, *Phys. Fluids A* **5**, 34 (1993); *Phys. Rev. E* **50**, R28 (1994).
- [3] P. Constantin, E. Grossmann, and M. Mungan, *Physica D* **83**, 409 (1995); E. Grossmann and M. Mungan *preprint*.
- [4] Y. Du, H. Li, and L. P. Kadanoff, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1268 (1995); T. Zhou and L. P. Kadanoff, *preprint*.
- [5] N. Schoerghofer and T. Zhou, *preprint* (1996).
- [6] N. V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, and T. Pöschel, *Phys. Rev. E*, **53**, 5382 (1996).
- [7] F. G. Bridges, A. Hatzes, and D. N. C. Lin, *Nature*, **309**, 333 (1984).
- [8] A. P. Hatzes, F. G. Bridges, and D. N. C. Lin *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **231**, 1091 (1988); K. D. Supulver, G. F. G. Bridges, and D. N. C. Lin, *ICARUS* **113**, 188 (1995).
- [9] A. Hatzes, F. G. Bridges, D. N. C. Lin, S. Sachtjen, *Icarus* **89**, 113 (1991); F. G. Bridges, K. D. Supulver, D. N. C. Lin, R. Knight, and M. Zafra, *preprint*; J. Blum, M. Muench, *Icarus* **106**, 151 (1993).
- [10] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, (Cambridge, 1985).
- [11] Y. H. Pao, *J. Applied Phys.*, **26**, 1083 (1955).
- [12] S. E. Esipov and T. Pöschel, *The granular phase diagram*, preprint.
- [13] P. K. Haff, *J. Fluid Mech.* **134**, 401 (1983).
- [14] C. K. K. Lun and S. B. Savage, *Acta Mechanica*, **63**, 15 (1986).
- [15] H. Hertz, *J. f. reine und angewandte Physik*, **92**, 156 (1882); *On the contact of rigid elastic solids and hardness, miscellaneous papers*, McMillan, (London, 1886).
- [16] T. Schwager and T. Pöschel, *in progress*.